Α)Στο μαθησιακό μοντέλο του Landahl *να επαληθεύσετε ότι πράγματι η w(n) δίνεται από την σχέση (56) και να λύσετε την διαφορική εξίσωση (57).*

Βιβλιογραφία: Directions in mathematical psychology II.AMM 1976,pp153-1

Β) Να κάνετε με την βοήθεια του Η/Υ τη γραφική παράσταση της λύσεως της Δ.Ε. (57) και να δικαιολογήσετε , γιατί η σιγμοειδής καμπύλη που προκύπτει καλείται «φυσιολογική καμπύλη μαθήσεως»(learning curve)

Γ) Πώς η χαοτική συμπεριφορά Λογιστικής εξισώσεως ,μπορεί να χρησιμοποιηθεί επωφελώς στο χώρο της εκπαίδευσης;

Βιβλιογραφία: Ι. Αραχωβίτης «Εισαγωγή στην Χαοτική δυναμική και τα κλασμοειδή (Fractals)- Παπασωτηρίου 2002

Λύση

Στο άρθρο του Anatol Rapoport αναφέρεται στο μαθησιακό μοντέλο του Landahl στα πλαίσια των σύγχρονων μαθησιακών μοντέλων.

Αυτό, βασίζεται σε πιθανοθεωρητική πλαίσιο ,και ο πυρήνας του είναι μια διαφορική εξίσωση, της οποίας η λύση, προβλέπει παραμέτρους του φαινόμενου.

Ο Landahl υποθέτει ότι σε μια μαθησιακή κατάσταση με δύο δυνατότητες επιλογής , η «σωστή» απάντηση προκύπτει όταν το επίπεδο ερεθισμού E_c στο νευρικό κανάλι που οδηγεί σ'αυτή, υπερέχει του ερεθισμού E_w στο νευρικό κανάλι που οδηγεί στην «λάθος» απάντηση. Η μάθηση επιτυγχάνεται γιατί κάθε σωστή απάντηση προσθέτει σταθερή αύξηση b στο ερεθισμό του αντίστοιχου

καναλιού και κάθε λάθος απάντηση αφαιρεί μια σταθερή ποσότητα β από τον ερεθισμό του καναλιού που οδηγεί σ' αυτό. Σε μια στιγμή, η διαφορά (E_c-E_w) υποθέτουμε ότι «διαταράσσεται» από μια τυχαία μεταβλητή X. Έτσι, μετά από n δοκιμές, η διαφορά δίνεται από τον τύπο:

$$\Delta(n)=E_c(0)-E_w(0)+bc+\beta w+X$$

όπου c ο αριθμός των σωστών απαντήσεων, w ο αριθμός των λανθασμένων απαντήσεων (έχουμε δηλαδή : n=c+w), και b, β οι σταθερές που προαναφέρθηκαν.

Η πιθανότητα λοιπόν μιας λανθασμένης απάντησης είναι:

$p_w(n)=P[\Delta(n)<0]=P[X<E_w(0)-E_c(0)-bc-\beta w]=P[X<E_w(0)-E_c(0)-bn+(b-\beta)w]$. **(1)**

Έστω ότι η n είναι συνεχής μεταβλητή, οπότε το $p_w(n)$ μπορεί να παρασταθεί ως $\frac{dw}{dn}$. Δηλαδή $p_w(n)=\frac{dw}{dn}$ **(2)**. Υποθέτοντας ότι το X ακολουθεί μια συγκεκριμένη κατανομή, η **(1)** μας δίνει μια διαφορική εξίσωση, που θα δώσει το w(n), τον αριθμό των λανθασμένων απαντήσεων, ως συνάρτηση των ερωτήσεων n.

Ο Landahl θεώρησε την συνάρτηση $f(x)=-\frac{k}{2}e^{-k|x|},\ k$ σταθερά (Laplacian), για πυκνότητα της X.

Προκειμένου να λυθεί η διαφορική εξίσωση **(2)** υποθέτουμε ότι b>β και ως αρχικές συνθήκες έχουμε:

$E_c(0)=E_w(0)$ και w(0)=0.

Έτσι:

$p_w(n)=P[X<E_w(0)-E_c(0)-bn+(b-\beta)w]=F[E_w(0)-E_c(0)-bn+(b-\beta)w]$,

όπου F η συνάρτηση κατανομής της X.

Οπότε :

$p_w(n)=\int_{-\infty}^{-bn+(b-\beta)w} -\frac{k}{2}e^{-k|x|}dx$, *όπου* $-bn+(b-\beta)w<0$

(γιατί $\begin{cases} b>b-\beta>0 \\ n>w>0 \end{cases} \Leftrightarrow bn>(b-\beta)w \Leftrightarrow -bn+(b-\beta)w<0$), άρα:

$p_w(n)=$

$$=\int_{-\infty}^{-bn+(b-\beta)w} -\frac{k}{2}e^{kx}dx=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-bn+(b-\beta)w} ke^{kx}dx=-\frac{1}{2}\left[e^{-kbn+(b-\beta)kw}-\lim_{x\to-\infty}e^{kx}\right]=$$

$$-\frac{1}{2}e^{-kbn+(b-\beta)kw}\ ,\ \text{όταν}\quad \kappa>0$$

Παρατηρούμε ότι η πιθανότητα $p_w(n)$ είναι αρνητική λόγω του παράγοντα –κ/2. Ελέγχοντας ότι η συνάρτηση f(x) που θεώρησε ο Landahl, είναι πράγματι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, θα πρέπει να ισχύει: f(x)>0 , για κάθε x, οπότε πρέπει να είναι –κ>0 και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)=1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{k}{2}e^{-k|x|}dx=1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{+\infty} ke^{-kx}dx+\int_{-\infty}^{0} ke^{kx}dx\right)=$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(1-\lim_{x\to+\infty}e^{kx}\right)+\left(1-\lim_{x\to-\infty}e^{-kx}\right)\right]=-\frac{1}{2}2=-1$$

που θα έπρεπε να είναι 1, για κ>0.

Το πρόβλημα δημιουργείται πάλι λόγω του –κ/2. Άρα θα πρέπει να διορθώσουμε στην πυκνότητα του Landahl το –κ/2 σε κ/2

Δηλαδή :

$$f(x)=\frac{k}{2}e^{-k|x|},\ \text{όπου}\ \ \kappa\ \ \text{θετική}\ \ \text{σταθερά}.$$

Οπότε η $p_w(n)=\frac{1}{2}e^{-bkn+(b-\beta)kw}$.

Έχουμε έτσι την διαφορική εξίσωση :

$$p_w(n)=\frac{dw}{dn}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-bkn+(b-\beta)kw}\Leftrightarrow\frac{dw}{dn}=\frac{1}{2}e^{-bkn}e^{(b-\beta)kw}\Leftrightarrow 2e^{-(b-\beta)kw}dw=e^{-bkn}dn\Leftrightarrow$$

$$\int 2e^{-(b-\beta)kw}dw=\int e^{-bkn}dn\Leftrightarrow 2\frac{e^{-k(b-\beta)w}}{-(b-\beta)k}=\frac{e^{-kbn}}{-kb}+c$$

όπου c σταθερά που θα υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Έχουμε δηλαδή:

$$w(n)=0 \Leftrightarrow n=w=0 \quad \text{οπότε} \quad \frac{2}{-(b-\beta)k}=\frac{1}{-kb}+c \Leftrightarrow c=\frac{2}{-(b-\beta)k}+\frac{1}{kb} \Leftrightarrow$$

$$c=\frac{-2b+b-\beta}{kb(b-\beta)} \Leftrightarrow c=\frac{-b-\beta}{kb(b-\beta)}$$

άρα θα έχουμε:

$$\frac{2e^{-kb(b-\beta)w}}{-(b-\beta)k}=\frac{e^{-kbn}}{-kb}-\frac{b+\beta}{kb(b-\beta)} \Leftrightarrow \frac{2e^{-kb(b-\beta)w}}{(b-\beta)k}=\frac{e^{-kbn}}{kb}+\frac{b+\beta}{kb(b-\beta)} \Leftrightarrow$$

$$2be^{-kb(b-\beta)w}=(b-\beta)e^{-kbn}+b+\beta \Leftrightarrow \ln\left[2be^{-kb(b-\beta)w}\right]=\ln\left[(b-\beta)e^{-kbn}+b+\beta\right] \Leftrightarrow$$

$$\ln 2b+\ln e^{-k(b-\beta)w}=\ln\left[(b-\beta)e^{-kbn}+b+\beta\right] \Leftrightarrow \ln 2b-k(b-\beta)w=\ln\left[(b-\beta)e^{-kbn}+b+\beta\right] \Leftrightarrow$$

$$k(b-\beta)w=\ln 2b-\ln\left[(b-\beta)e^{-kbn}+b+\beta\right] \Leftrightarrow k(b-\beta)w=\ln\frac{2b}{(b-\beta)e^{-kbn}+b+\beta} \Leftrightarrow$$

$$w=\frac{1}{k(b-\beta)}\ln\frac{2b}{(b-\beta)e^{-kbn}+b+\beta} \text{ ,όμως } \quad b+\beta=2b-(b-\beta) \text{ ,οπότε}$$

$$w=\frac{1}{k(b-\beta)}\ln\frac{2b}{(b-\beta)e^{-kbn}+2b-(b-\beta)}$$

Πράγματι λοιπόν η w(n) δίνεται από τον τύπο (56)του άρθρου.

Στην συνέχεια του άρθρου ο Rapoport αναφέρει πως αν θέσουμε β=0

και εξετάσουμε την εξίσωση $p_c=\dfrac{dc}{dn}$ προκύπτει ότι η μεταβλητή p_c

θα ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση: $\dfrac{dp_c}{dn}$ = $b'p_c(1-p_c)$, όπου $b'=kb$.

Θα λύσουμε την εξίσωση αυτή και στην συνέχεια θα βρούμε το c(n).

Ισχύει ότι:

$$\frac{dp_c}{dn}=b'p_c(1-p_c)=kbp_c(1-p_c)\Rightarrow\frac{dp_c}{p_c(1-p_c)}=kbdn\Rightarrow\int\frac{dp_c}{p_c(1-p_c)}=\int kbdn\ \Rightarrow$$

$$\int\left[\frac{1}{p_c}+\frac{1}{1-p_c}\right]dp_c=kb\int dn\Rightarrow\int\frac{1}{p_c}dp_c+\int\frac{1}{1-p_c}dp_c=kb\int dn\Rightarrow$$

$$\ln p_c-\ln(1-p_c)=kbn+a\Rightarrow\ln\frac{p_c}{1-p_c}=kbn+a\Rightarrow\frac{p_c}{1-p_c}=e^{kbn+a}\Rightarrow\frac{p_c}{1-p_c}=Ae^{kbn}\Rightarrow$$

$$p_c=(1-p_c)Ae^{kbn}\Rightarrow p_c(1+Ae^{kbn})=Ae^{kbn}\Rightarrow p_c=\frac{Ae^{kbn}}{1+Ae^{kbn}}$$

Όμως έχουμε ότι:

$$p_c=\frac{dc}{dn}\Rightarrow\frac{dc}{dn}=\frac{Ae^{kbn}}{1+Ae^{kbn}}\Rightarrow dc=\frac{Ae^{kbn}}{1+Ae^{kbn}}dn\Rightarrow\int dc=\int\frac{Ae^{kbn}}{1+Ae^{kbn}}dn\ \Rightarrow$$

$$\int dc=\frac{1}{kb}\int\frac{(1+Ae^{kbn})'}{1+Ae^{kbn}}dn\ \Rightarrow\int dc=\frac{1}{kb}\int[\ln(1+Ae^{kbn})]'dn\ \Rightarrow c(n)=\frac{1}{kb}\ln(1+Ae^{kbn})+B\quad(3)$$

Όμως: c(0)=0 , οπότε :

$0 = \frac{1}{kb}\ln(1+A) + B \;\Leftrightarrow\; B = -\frac{1}{kb}\ln(1+A)$ οπότε η **(3)** γίνεται:

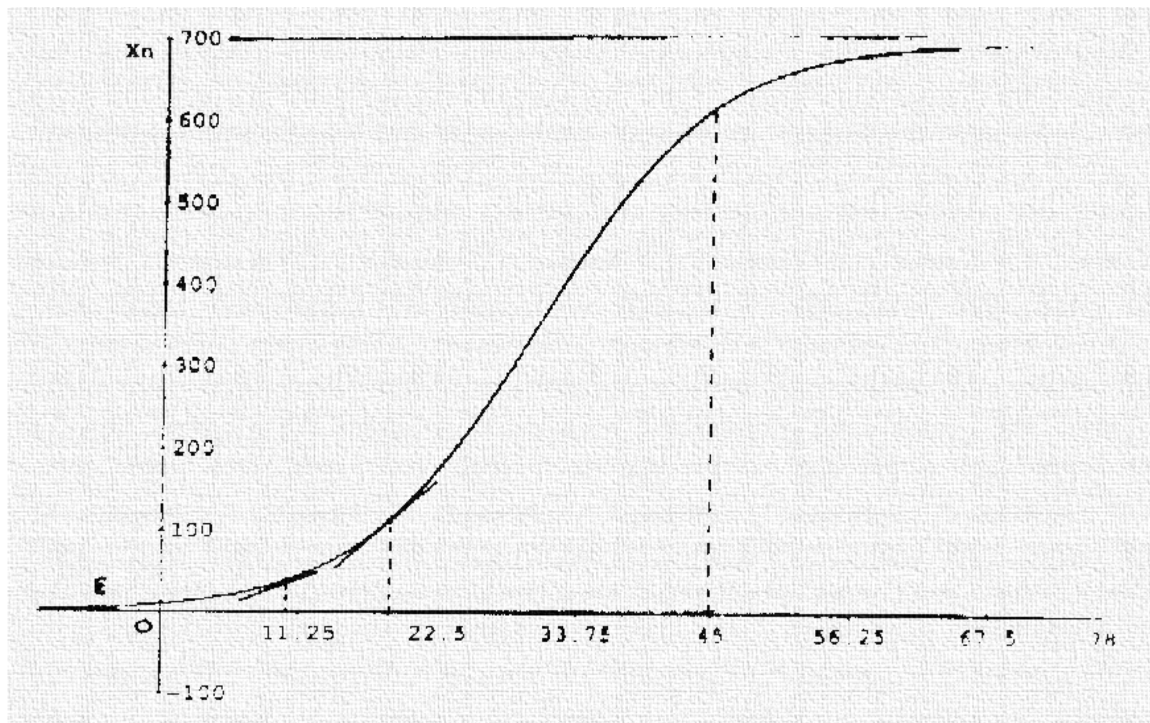
$$c(n) = \frac{1}{kb}\left(\ln(1+Ae^{kbn}) - \ln(1+A)\right) \Leftrightarrow c(n) = \frac{1}{kb}\ln\frac{1+Ae^{kbn}}{1+A}$$

Η εξίσωση αυτή είναι ενδεικτική της διαδικασίας διάδοσης μολυσματικών νόσων, όπου το p_c παριστάνει το κλάσμα των μολυσμένων ατόμων του πληθυσμού, στον οποίο η μετάδοση της νόσου, προκύπτει από τυχαίες (ισοπίθανες) επαφές ανάμεσα στα μολυσμένα και μη, άτομα του πληθυσμού.

Επομένως:

Αν θεωρήσουμε το p_c ως το κλάσμα των νευροστοιχείων που εμπλέκονται στην μαθησιακή διαδικασία, μπορούμε να φανταστούμε ότι η μάθηση είναι μια εξελικτική διάδοση των νευροστοιχείων που εμπλέκονται , με τυχαίες επαφές(ισοπίθανες), ανάμεσα στα νευροστοιχεία που εμπλέκονται ή όχι!………

Η ΣΙΓΜΟΕΙΔΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗ
ΚΑΙ Η
ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΤΗΣ



Η παραπάνω μορφή καμπύλης αποκαλείται σιγμοειδής, από το s «σίγμα» ς της μορφής της. Καλείται και «φυσιολογική καμπύλη» Αυτή , μπορεί να προκύψει από πάρα πολλά φαινόμενα.

1) ***<u>Αθροιστική συχνότητα κανονικής κατανομής</u>***

Είναι γεγονός ότι πλείστα όσα φαινόμενα ακολουθούν την κανονική κατανομή, άρα σύρουν μαζί τους και την αθροιστική κατανομή συχνότητας με την ερμηνεία της

2) <u>Ανάπτυξη πληθυσμού :</u>

Ας θεωρήσουμε ένα πληθυσμό ο οποίος αναπτύσσεται σ' ένα περιβάλλον το οποίο δεν μπορεί να εκθρέψει περισσότερα άτομα από Β. Στην αρχή η ανάπτυξη του πληθυσμού προχωρά με μικρή ταχύτητα. Κατόπιν ακολουθεί μία περίοδος γρήγορης ανάπτυξης, την οποία διαδέχεται μία κάμψη (σημείο καμπής) του ρυθμού ανάπτυξης, που γίνεται όλο και πιο μεγάλη καθώς ο πληθυσμός πλησιάζει το φράγμα των Β ατόμων.

3) <u>Μετάδοση φήμης:</u>

Στην αρχή η φήμη αυτή διαδίδεται αργά, Κατόπιν η διάδοση γίνεται ραγδαία και ακολούθως παρουσιάζεται μία διάδοση η οποία γίνεται όλο και πιο αργή, αφού τη φήμη αυτή τείνουν να την πληροφορηθούν όλοι οι κάτοικοι μιας πόλης

4) <u>Επιδόσεις αθλητή:</u>

Στην αρχή οι επιδόσεις του είναι σε χαμηλό επίπεδο. Με τη συνεχή προπόνηση όμως, οι επιδόσεις παρουσιάζουν μία γρήγορη άνοδο. Όταν φθάσουν στα επίπεδα του Παγκοσμίου ρεκόρ, η βελτίωσή τους είναι πολύ μικρή, η δε κατάρριψη του παγκοσμίου ρεκόρ γίνεται, Π.χ. στα 100m, για εκατοστά του δευτερολέπτου, ή για 500gr στην άρση βαρών.

5) <u>Εκμάθηση γραφομηχανής</u>

Μία δακτυλογράφος μαθαίνοντας γραφομηχανή, αρχίζει να γράφει λίγες λέξεις στο λεπτό. Κατόπιν, με την εξάσκηση, οι λέξεις γρήγορα ανεβαίνουν στις 120 το λεπτό. Από εκεί και πέρα η βελτίωση που παρουσιάζει Θα είναι της τάξης των 2-3 ακόμη λέξεων, ενώ ασφαλώς είναι ανθρωπίνως αδύνατον να υπερβεί τις 580 λέξεις ανά λεπτό.

6) Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος σε δίοδο λυχνία

Με διαφορά τάσης 0 , έχω κάποιο ρεύμα , λόγω πυρακτώσεως της καθόδου , η οποία παράγει κάποια ηλεκτρόνια που φθάνουν στην άνοδο. Αυξανομένης της τάσεως , φθάνουν διαρκώς και περισσότερα ηλεκτρόνια στην μονάδα του χρόνου (αύξηση εντάσεως ρεύματος) αλλά από ένα σημείο και πέρα η αύξηση δεν είναι ανάλογη και τείνει να σταθεροποιηθεί σε μία τιμή, καθώς όσο και η τάση να «πιέζει» προς την αύξηση της έντασης, η παραγωγή ηλεκτρονίων στην κάθοδο (λόγω πυρακτώσεώς της) είναι σταθερή και δεν μπορεί να ικανοποιήσει την «ζήτηση» της τάσεως!

Όλες οι περιπτώσεις που αναφέραμε παραπάνω, καθώς και. άλλες πολλές, ερμηνεύονται γραφικά με τη σιγμοειδή καμπύλη του σχήματος και δικαιολογούν έτσι τον όρο “φυσιολογική” που χρησιμοποιήσαμε γι’ αυτήν.

ΓΙΑΤΙ Η ΣΙΓΜΟΕΙΔΗΣ ΛΕΓΕΤΑΙ ΚΑΙ «ΚΑΜΠΥΛΗ ΜΑΘΗΣΗΣ;»

Η σιγμοειδής καμπύλη του σχήματος καλείται και **καμπύλη μάθησης** γιατί ακριβώς μία τέτοια πορεία ακολουθείται, οτιδήποτε και αν αρχίσει να μαθαίνει κάποιος. Ας μελετήσουμε λεπτομερέστερα την καμπύλη μάθησης από γεννήσεως μέχρι την ηλικία π.χ. των 80 ετών. Η καμπύλη του σχήματος προεκτείνεται και προ της γεννήσεως, επαληθεύοντας αυτό που ακούμε συχνά, δηλαδή ότι η γνώση αρχίζει από την εμβρυακή ηλικία ε .(πριν την χρονική στιγμή 0 της γέννησης!) Επίσης προεκτείνεται ασυμπτωτικά προς την ευθεία $x_n = 780$, επαληθεύοντας ότι “γηράσκω αεί διδασκόμενος”. Παρατηρούμε επίσης ότι αν φέρουμε την εφαπτομένη της καμπύλης σ’ ένα σημείο κοντά στην αρχή των αξόνων, καθώς και σ’ ένα σημείο τετμημένης π.χ. 88, οι εφαπτόμενες αυτές είναι περίπου παράλληλες, δηλαδή έχουν την ίδια κλίση. Η κλίση της εφαπτομένης σ’ ένα σημείο είναι η τιμή της παραγώγου της συνάρτησης στο σημείο αυτό, η δε παράγωγος είναι ο (στιγμιαίος) ρυθμός μεταβολής, η (στιγμιαία) ταχύτητα. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα με την οποία μαθαίνει κανείς στα 88 είναι ίδια με εκείνη που μάθαινε όταν ήταν μωρό ή, όπως πολύ σοφά λέει ο λαός στα 80 κανείς “ξαναμωραίνεται”. Ένα άλλο σημείο που μας δείχνει με πόσο φυσιολογικό τρόπο ερμηνεύει πάντα τα σχετικά με την μάθηση η σιγμοειδής καμπύλη, είναι ότι. αποδίδει ακόμη και αυτό που συχνά λέμε, ότι στα 45 του ο άνθρωπος βρίσκεται στην καλύτερη ηλικία του από πλευράς επιδόσεων. Η καμπύλη μάθησης προχωρά ακόμη περισσότερο και μας δίνει και μία παιδαγωγική συμβουλή: Παρατηρούμε ότι στην ηλικία των 10 ετών (Δημοτικό) η ταχύτητα με την οποία μαθαίνει Κανείς είναι πολύ

μικρότερη από εκείνη με την οποία μαθαίνει στα 18 (Λύκειο). Επομένως είναι λάθος να χρησιμοποιούμε στο Λύκειο ίδιες μεθόδους παροχής γνώσεων με εκείνες που χρησιμοποιούμε στο Δημοτικό. Δεν τροφοδοτούνται ποτέ με τα ίδια καύσιμα δύο οχήματα που το ένα «πιάνει» διπλάσια ταχύτητα από το άλλο, γιατί το αποτέλεσμα θα είναι να καταστραφεί ο κινητήρας.

Σ' επίρρωση όλων των παραπάνω ας σημειώσουμε και εδώ τα εξής:

Το συνεχές ανάλογο του διακριτού δυναμικού συστήματος

Που περιγράψαμε είναι η διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x (B - x)$$

η ολοκλήρωση της οποίας μας δίνει ως λύσεις συναρτήσεις της μορφής

$$x(t) = \frac{B}{1 + ke^{-\lambda \mathrm{B} t}}$$

Η γραφική παράσταση τέτοιων συναρτήσεων είναι σταθερά σιγμοειδής (με την έννοια ότι δεν παρουσιάζουν για καμία τιμή της παραμέτρου λ, κυκλική ή χαοτική συμπεριφορά). Στη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dp_c}{dn} = b' p_c (1 - p_c)$$

όπου p_c, είναι η πιθανότητα ορθής επιλογής σ' ένα πείραμα μάθησης του τύπου «ορθό-λάθος», καταλήγουμε και στο μαθησιακό υπόδειγμα (μοντέλο) του Landahl και έτσι διασταυρώνουμε και από άλλη πλευρά το φυσιολογικό της σιγμοειδούς καμπύλης.

Ελλείψει λοιπόν φυσικού νόμου ο οποίος να διέπει το φαινόμενο της μάθησης και με βάση την παραπάνω τεκμηρίωση, δεχόμαστε ως καλύτερη προσέγγιση, ως πλέον αποδεκτό υπόδειγμα για τη φυσιολογική εξέλιξη της μάθησης, αυτό που περιγράφεται από τη σιγμοειδή καμπύλη. Αυτός άλλωστε είναι και ο λόγος που ονομάστηκε καμπύλη μάθησης (learning curve) στη Γνωστική Ψυχολογία.

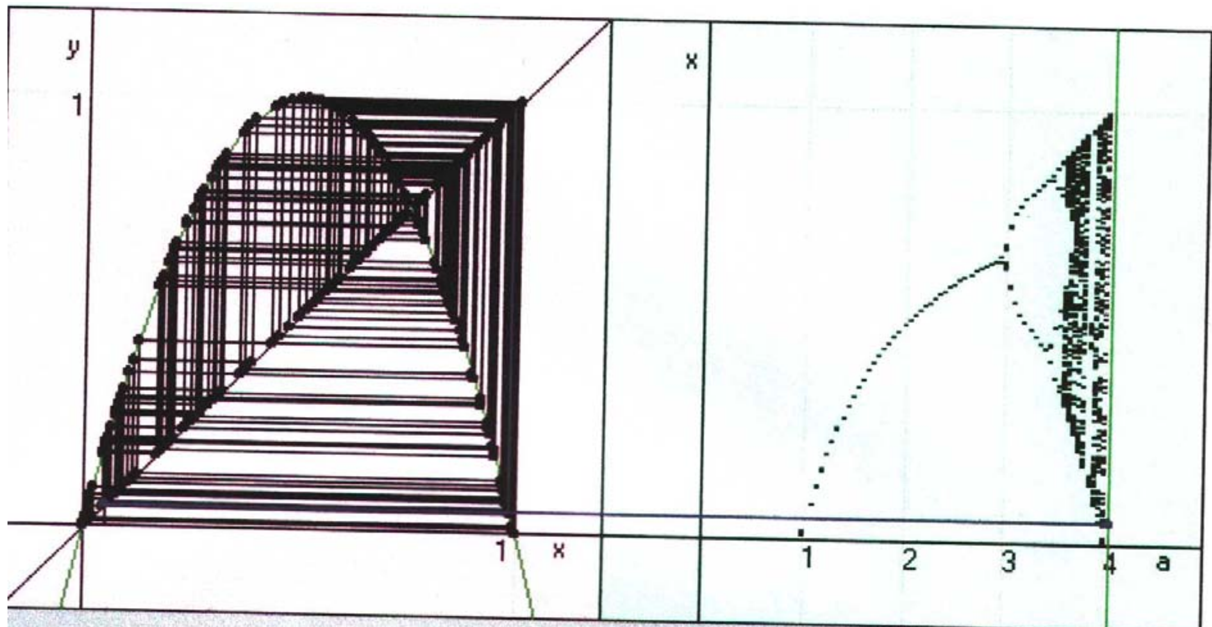
<u>Γ)Πώς η χαοτική συμπεριφορά της λογιστικής εξισώσεως μπορεί να χρησιμοποιηθεί επωφελώς στον χώρο της εκπαίδευσης:</u>

Παρακολουθώντας την ατομική καμπύλη μάθησης κάθε μαθητή (όχι μόνο του σχολείου, αλλά καθενός που μαθαίνει κάτι), όταν διαπιστώσουμε ότι αυτή παύει να έχει. σιγμοειδή μορφή, δηλαδή παύει να είναι φυσιολογική και αρχίζει να παρουσιάζει αυξανόμενη περιοδικότητα, πρέπει ν' αρχίσουμε και. εμείς ν' ανησυχούμε γιατί είναι βέβαιο ότι η μάθηση, περνώντας το κατώφλι, θα βρεθεί στην περιοχή του Χάους. Θα παρουσιάσει αναπόδραστα χαοτική συμπεριφορά. Έτσι, έχουμε το χρόνο να επέμβουμε διορθωτικά και να προλάβουμε την επαπειλούμενη χαοτική εξέλιξη και αυτό, μόνο εάν οι διαδοχικές διχαλώσεις μας κρούουν τον κώδωνα κινδύνου. Εκείνο

που χρειάζεται λοιπόν για τον παραπάνω έλεγχο είναι κατάλληλα τεστ από ομάδες καταλλήλων επιστημόνων, προς στιγμήν Θα έλεγε κανείς. για κάθε “μάθημα” καταργουμένων έτσι των εξετάσεων και της βαθμολόγησης με τη στενή σημερινή έννοια. Τα τεστ σε κάθε μάθημα μπορεί ν’ αντικατασταθούν από ένα ενιαίο τεστ ανάπτυξης ή μάθησης, αν δεχθούμε ότι Ισχύει ο νόμος της αλλομετρίας. Σύμφωνα με τον νόμο αυτόν ‘άλλο μετράμε και για άλλο συμπεραίνουμε “, πράγμα που ηχεί περίεργα βέβαια, αλλά που αποτελεί μία καθιερωμένη πρακτική. Πράγματι, Ο παιδίατρος π.χ. που παρακολουθεί ένας βρέφος, μετρώντας με τη “μεζούρα” την περίμετρο του κρανίου. συμπεραίνει —χωρίς να τα μετρήσει— ότι και τα υπόλοιπα εσωτερικά όργανο αναπτύσσονται κανονικά, όταν διαπιστώσει κανονική κρανιακή ανάπτυξη.

Η προτεινόμενη μέθοδος αξιολόγησης, από ποιοτική, μπορεί να μετατραπεί. σε καθαρά ποσοτική, αν αυτό είναι επιθυμητό. Πράγματι, στην διάθεσή μας βρίσκεται μία πλήρης κλίμακα τιμών της παραμέτρου λ που αντιστοιχούν στα διάφορα στάδια εξέλιξης.

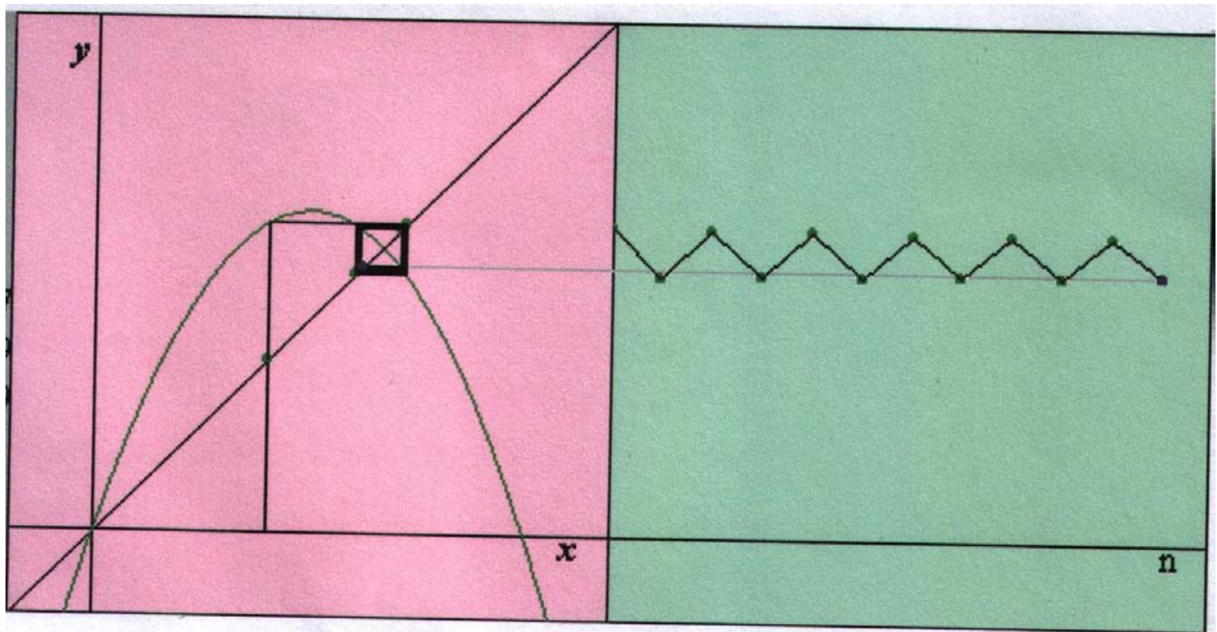
Έτσι, όπως γνωρίζουμε, για $\lambda = 3{,}57$ το διάγραμμα στο παρακάτω σχήμα χωρίζεται σε δύο περιοχές.

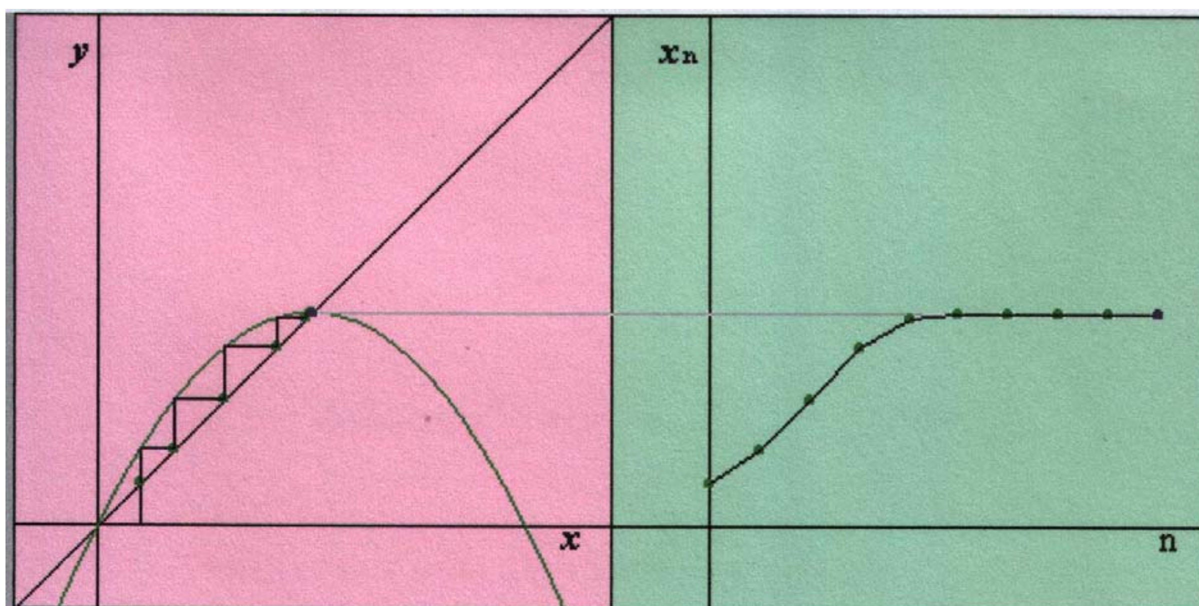


Αριστερά είναι η περιοχή του δένδρου διπλασιασμού Τ:
περιόδου και δεξιά η περιοχή που κυριαρχεί το χάος. Δηλαδή, η τιμή λ= 3,57 καθορίζει κατά κάποιο τρόπο το κατώφλι του χάους. Η τιμή αυτή του λ είναι το σημείο Feigenbaum. Το όνομά του φέρει και η σταθερά δ = 4,67, η οποία υπενθυμίζουμε ότι προκύπτει ως εξής: Αν θεωρήσουμε διαδοχικές διχαλώσεις και μετρήσουμε την οριζόντια απόσταση μεταξύ των δύο πρώτων και στην συνέχια την διαιρέσουμε με την οριζόντια απόσταση της δεύτερης από την Τρίτη διχάλωση, ο λόγος που προκύπτει παραμένει σταθερά ίσος προς 4,67 . αυτή είναι η σταθερά Feingenbaum . Με την βοήθειά της, αν γνωρίζουμε δύο διαδοχικές διχαλώσεις της, μπορούμε να προβλε΄ψουμ πού θα συμβεί η επόμενη. Έτσι , μας προκύπτει και το που τελειώνουν οι διχαλώσεις κι αρχίζει το χάος . Δηλαδή, για την προτεινόμενη αξιολόγηση, το σημείο του Feingenbaum είναι το σημείο για το οποίο πρέπει να ανησυχούμε ! …………

ενδεικτικά αναφέρουμε τιμές που καθορίζουν και την συμπεριφορά της λογιστικής εξίσωσης:

- ✓ Για 1<λ<=3 έχουμε φυσιολογική ανάπτυξη. (Σιγμοειδής καμπύλη)
- ✓ Για 3<λ_3,57 έχουμε ανάπτυξη με συνεχή διπλασιασμό της περιόδου.
- ✓ Για 3,57<λ<4,0 έχουμε χαοτική ανάπτυξη




y
x
xn
n